دانیل فلایش

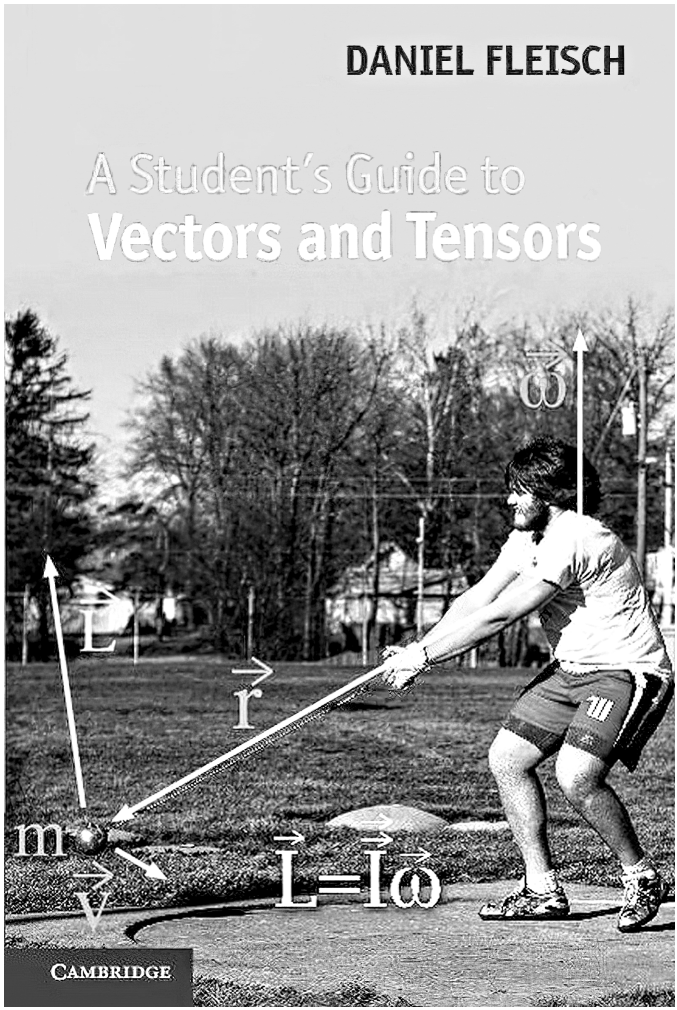
راهنمای دانشجویان برای
بردارها و تانسورها

ترجمهٔ

بهنام شیخ‌باقری

نشر نی

این اثر ترجمه‌ای است از کتاب:



A Student's Guide to Vectors and Tensors

DANIEL A. FLEISCH

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,
Singapore, São Paulo, Delhi, Tokyo, Mexico City

Cambridge University Press
The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK

Published in the United States of America by Cambridge University Press,
New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9780521171908

© D. Fleisch 2012

This publication is in copyright. Subject to statutory exception
and to the provisions of relevant collective licensing agreements,
no reproduction of any part may take place without the written
permission of Cambridge University Press.

First published 2012

Printed in the United Kingdom at the University Press, Cambridge

A catalog record for this publication is available from the British Library

ISBN 978-0-521-19369-6 Hardback

ISBN 978-0-521-17190-8 Paperback

Additional resources for this publication at
www.cambridge.org/9780521171908

Cambridge University Press has no responsibility for the persistence or
accuracy of URLs for external or third-party internet websites referred to
in this publication, and does not guarantee that any content on such
websites is, or will remain, accurate or appropriate.

فهرست مطالب

مقدمهٔ مترجم ۱۳
دربارهٔ کتاب بردارها و تانسورها ۱۹
مقدمه ۲۱
قدردانی ۲۵

فصل ۱. بردارها ۲۷
۱-۱. تعاریف (پایه) ۲۷
۱-۲. بردارهای واحد در دستگاه دکارتی ۳۳
۱-۳. مؤلفه‌های بردار ۳۵
۱-۴. جمع بردارها و ضرب بردارها در یک عدد یا اسکالر ۳۹
۱-۵. بردارهای واحد غیردکارتی ۴۴
۱-۶. بردارهای پایه ۵۲
۱-۷. مسائل فصل ۱ ..... ۵۶

فصل ۲. عملیات برداری ۵۹
۲-۱. ضرب نقطه‌ای، داخلی یا اسکالر دو بردار ۵۹
۲-۲. ضرب برداری یا خارجی دو بردار ۶۳
۲-۳. ضرب سه‌گانهٔ اسکالر ۶۶
۲-۴. ضرب برداری سه‌گانه ۶۹
۲-۵. مشتقات جزئی ۷۲

۲-۶. بردارها به منزلهٔ مشتقات ۸۲
۲-۷. نابلا ـ عملگر دِل ۸۵
۲ ـ ۸. گرادیان ۸۶
۲-۹. دیورژانس ۸۸
۲-۱۰. کِرل ۹۴
۲-۱۱. لاپلاسین ۹۹
۲-۱۲. مسائل فصل ۲ ۱۰۸

فصل ۳. کاربردهای بردار ۱۰۹
۳-۱. جرم بر روی سطح شیب‌دار ۱۰۹
۳-۲. حرکت منحنی‌الخط ۱۲۳
۳-۳. میدان الکتریکی ۱۳۵
۳-۴. میدان مغناطیسی ۱۴۶
۳-۵. مسائل فصل ۳ ۱۵۴

فصل ۴. مؤلفه‌های هموردا و پادوردای یک بردار ۱۵۷
۴-۱. تبدیلات دستگاه مختصات ۱۵۷
۴-۲. تبدیلات بردار پایه ۱۶۷
۴-۳. مقایسهٔ تبدیل بردارهای پایه با تبدیل مؤلفه‌ها ۱۷۲
۴-۴. دستگاه‌های مختصات غیرمتعامد ۱۷۴
۴-۵. بردارهای پایهٔ دوگان ۱۷۷
۴-۶. به دست آوردن مؤلفه‌های هموردا و پادوردا ۱۸۲
۴-۷. نشانه‌گذاری نمایه‌ای ۱۹۰
۴-۸. کمیت‌هایی که به طور پادوردا تبدیل می‌شوند ۱۹۳
۴-۹. کمیت‌هایی که به طور هموردا تبدیل می‌شوند ۱۹۸
۴-۱۰. مسائل فصل ۴ ۲۰۲

فصل ۵. تانسورهای مرتبهٔ بالاتر ۲۰۳
۵-۱. تعاریف (پیشرفته) ۲۰۴
۵-۲. تانسورهای هموردا، پادوردا و مخلوط ۲۰۶
۵-۳. جمع و تفریق تانسورها ۲۰۸

۵-۴. ضرب تانسورها ۲۱۰
۵-۵. تانسور متریک ۲۱۳
۵-۶. بالا بردن و پایین آوردن نمایه (اندیس) ۲۲۵
۵-۷. مشتقات تانسور و نمادهای کریستوفل ۲۲۶
۵-۸. مشتق‌گیری هموردا ۲۳۳
۵-۹. بردارها و یک‌شکل‌ها ۲۳۷
۵-۱۰. مسائل فصل ۵ ..... ۲۴۰

فصل ۶. کاربردهای تانسور ۲۴۱
۶-۱. تانسور لَختی ۲۴۱
۶-۲. تانسور میدان الکترومغناطیسی ۲۵۸
۶-۳. تانسور انحنای ریمان ۲۷۵
۶- ۴. مسائل فصل ۶ ..... ۲۸۹

منابعی برای مطالعهٔ بیشتر ۲۹۱
نمایه ۲۹۳

مقدمهٔ مترجم

کتاب طبیعت به زبان ریاضیات نوشته شده است و لذا کسی که می‌خواهد دانش عمیقی در فیزیک داشته باشد، باید به اندازهٔ کافی ریاضیات بداند. یک دانشجوی فیزیک برای بالا بردن دانش خود از سطح عمومی و همگانی به سطح تخصصی، نیازمند ریاضیات است و این نیاز با عمیق‌تر شدن در قوانین فیزیک بیشتر و بیشتر می‌شود؛ به طوری که لازمهٔ دانش عمیق در مکانیک و الکترومغناطیس آگاهی از قوانین حاکم بر بردارهاست و ضرورت درک عمیق از نظریهٔ نسبیت و به‌ویژه نسبیت عام، تسلط بر حساب تانسورهاست.

بردارها و تانسورها دو ابزار ریاضی کارآمد در توصیف پدیده‌های فیزیکی‌اند. قوانین مکانیک و قانون گرانش نیوتن اگرچه به زبان بردارها متولد نشدند، اما کامل‌ترین توصیف خود را به زبان بردارها یافتند. قوانین الکترومغناطیس ماکسول نیز از همان ابتدا به زبان بردارها نوشته شدند. «بردارها» زبان ریاضی بسیار کارآمدی برای توصیف سرعت، شتاب و میدان گرانشی در مکانیک، و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و برهم‌کنش آن‌ها در الکترومغناطیس است. تا آغاز قرن بیستم توصیف جهان فیزیکی در انحصار بردارها بود. اما با توسعهٔ فیزیک نیاز به ابزارهای ریاضی کارآمدتر و جامع‌تر پدید آمد. رشد دانش فیزیک و نیاز آن به مفاهیم جدید به حاکمیت بردارها بر فیزیک پایان داد. بردارها دیگر نمی‌توانستند مفاهیم پیچیده‌تری همچون انحنا، انرژی و اندازهٔ حرکت را توصیف کنند و رابطهٔ بین هندسهٔ فضا با مادهٔ موجود در آن را نشان دهند. اگرچه گسترش بردارها به اشیای ریاضی دیگری به نام تانسورها ــ توسط ریاضی‌دانانی نظیر ریمان، ریچی و کریستوفل ــ مستقل از پیشرفت‌های فیزیکی انجام شده بود، لیکن معلوم شد که به‌درستی از عهدهٔ توصیف مفاهیم جدید فیزیکی برمی‌آیند و می‌توانند نظریات جدید فیزیکی همچون نسبیت را دقیق توصیف کنند.

کتاب بردارها و تانسورها به قلم آقای دانیل فلایش به زبانی ساده نوشته شده است تا دانشجویان را با بردارها و تانسورها که برای درک فیزیک جنبهٔ حیاتی دارند آشنا کند. این کتاب دارای شش فصل است که سه فصل نخست به بردارها و سه فصل بعدی به تانسورها اختصاص داده شده است. یکی از محاسن این کتاب اتکای آن به تصاویر است که فهم موضوعات انتزاعی را تا حد ممکن تسهیل می‌کند، و حُسن بزرگ‌ترش اختصاص دادن دو فصل از شش فصل کتاب به کاربرد بردارها و تانسورها در فیزیک. به طوری که با معرفی کاربرد این ابزارهای ریاضی در دو فصل یادشده اهمیت آن‌ها را در توصیف قوانین طبیعت کاملاً آشکار می‌سازد.

نویسندهٔ این کتاب ابتدا بردارها را توصیف می‌کند و سپس تانسورها را. در مورد بردارها دستش بازتر است، زیرا مصور کردن و تجسم مفاهیم برداری ساده‌تر و مفهوم‌تر است. پس از تعریف مقدماتی بردارها و نمایش آن‌ها در دستگاه‌های مختصات کارتزین، کروی و استوانه‌ای به اَعمال اصلی حساب نظیر جمع و تفریق و ضرب بردارها می‌پردازد و سپس اَعمال پیچیده‌تری همچون دیورژانس، گرادیان، کِرل و لاپلاسین را معرفی می‌کند و نقش مؤثر آن‌ها در توصیف مفاهیم مکانیکی و الکترومغناطیسی را با مثال‌هایی نشان می‌دهد.

کتاب عبور از حوزهٔ بردارها به تانسورها را با تغییر از دستگاه مختصات متعامد به غیرمتعامد آغاز می‌کند و مشکلی را که با تغییر دستگاه مختصات در به دست آوردن مؤلفه‌های یک بردار آشکار می‌شود تبیین می‌کند، و نشان می‌دهد که چگونه مؤلفه‌های هموردا و پادوردای یک بردار، که در دستگاه مختصات متعامد بر هم منطبقند، از هم جدا می‌شوند. یک بردار را در یک دستگاه مختصات غیرمتعامد می‌توان به دوگونه توصیف کرد. با دسته‌ای از مؤلفه‌های هموردا و یا با دسته‌ای از مؤلفه‌های پادوردا. مؤلفه‌های هموردا همسو با بردارهای پایه و مؤلفه‌های پادوردا ناهمسو با بردارهای پایه تغییر می‌کنند. به این ترتیب، راهی به دست می‌آید که بتوان یک بردار را از ترکیب مؤلفه‌های پادوردا با بردارهای پایهٔ اصلی و یا از ترکیب مؤلفه‌های هموردا با بردارهای پایهٔ دوگان چنان نوشت که با تغییر دستگاه مختصات بی‌تغییر بماند و به این ترتیب از یک سو برای فیزیک که در جست‌وجوی ناورداهای طبیعت است مطلوب‌تر شود و از سوی دیگر در ریاضیات از زمرهٔ اشیایی که صرفاً دارای اندازه و جهت هستند فراتر رود و در دستهٔ ابزارهای ریاضی پیشرفته‌تری به نام تانسورهای مرتبهٔ یک قرار گیرد.

کتاب از گسترش تعداد مؤلفه‌های یک بردار از ۳ تا به 3^n تا در فضای سه‌بعدی، و

گسترش جهت بردارهای پایه از یکی به چند تا وارد دنیای تانسورها می شود و آن‌ها را چنین تعریف می‌کند:

یک تانسور مرتبهٔ n، آرایه‌ای از 3^n مقدار (در فضای سه‌بعدی) به نام مؤلفه‌های تانسور است که در ترکیب با بردارهای پایه (نشانگرهایی با جهات متعدد) کمیتی می‌سازد که با تغییر دستگاه مختصات، ثابت می‌ماند.

با تعریف اخیر، در فضای چهاربعدی که بستر قوانین نظریهٔ نسبیت است یک تانسورمرتبهٔ صفر، دارای یک مؤلفه، تانسور مرتبهٔ یک، دارای ۴ مؤلفه، تانسورمرتبهٔ دو دارای ۱۶ مؤلفه، تانسورمرتبهٔ سه دارای ۶۴ مؤلفه و همین‌طور الی آخر است.

تانسورها نیز همچون بردارها می‌توانند دارای مؤلفه‌های هموردا و پادوردا باشند و علاوه بر آن‌ها می‌توانند مؤلفه‌هایی مرکب از هر دو داشته باشند که نوع اخیر را «تانسورهای مخلوط» می‌نامند. برای تانسورها نیز همچون بردارها اَعمال جمع و تفریق و ضرب تعریف می‌شود. از آن‌ها نیز می‌توان مشتق و انتگرال گرفت و لذا قوانین حساب دیفرانسیل و انتگرال برای آن‌ها نیز برقرار است.

از جملهٔ مهم‌ترین مباحث کتاب، معرفی «تانسور متریک» است. تانسور متریک تعمیمی از رابطهٔ فیثاغورث در فضای چهاربعدی با محورهای مختصات دلخواه است که به کمک آن می‌توان کمیت‌های بنیادی همچون فواصل و زوایا را در تمام مکان‌های فضا–زمان تعریف کرد. تانسور متریک نیز همچون تانسورهای دیگر می‌تواند متشکل ازمؤلفه‌های هموردا، پادوردا یا ترکیبی از این دو باشد که به کمک آن می‌توان تانسورهای هموردا را به پادوردا یا مخلوط و بالعکس تبدیل کرد.

در بسیاری از کاربردها دانستن این که یک میدان برداری در اثر جابه‌جایی چگونه تغییر می‌کند، بسیار اهمیت دارد. وقتی این میدان برداری در دستگاه کارتزین باشد مشتق‌گیری از مؤلفه‌های بردار ساده است، زیرا جهت و اندازهٔ بردارهای پایه در دستگاه کارتزین ثابت می‌ماند و مشتق آن‌ها صفر می‌شود. اما در دستگاه‌های دیگر (مثلاً دستگاه مختصات کروی) با حرکت در فضا جهات بردارهای پایه تغییر می‌کند و دیگر مشتق آن‌ها صفر نمی‌شود و لذا باید آن‌ها را نیز به حساب آورد. با گذر از بردارها به تانسورها، و از دستگاه‌های مختصات متعامد به منحنی، نقش بردارهای پایه پررنگ‌تر می‌شود و لازم می‌شود که مشتق بردارهای پایه در جهات مختلف با نماد جداگانه‌ای به نمایش درآید. نماد کریستوفل در پاسخ به چنین ضرورتی تعریف می‌شود تا در مشتق‌گیری از مؤلفه‌های یک تانسور سهولتی ایجاد کند.

در دستگاه مختصات کارتزین می‌توان دو بردار در دو مکان متفاوت را با انتقال موازیِ

یکی از آن‌ها به مکان دیگری با یکدیگر مقایسه یا ترکیب کرد، زیرا جهت و مقدار بردار با چنین انتقالی تغییر نمی‌کند. اما در دستگاه‌های غیرکارتزین چون طول و جهت بردارهای پایه می‌تواند از یک مکان به دیگری تغییر کند، امکان استفاده از انتقال موازی به صورت قبل میسر نیست. مشتق‌گیری هموردا وسیله‌ای برای انتقال موازی یک بردار به مکان بردار دیگر فراهم می‌کند و از این‌جا راهی برای دست‌یابی به تانسور انحنای ریمان که معرف انحنای فضا در دنیای تانسورهاست، باز می‌کند.

فصل آخر کتاب به معرفی سه تانسور مهم اختصاص داده شده است و در آن تانسور لَختی، تانسور میدان الکترومغناطیسی و تانسور انحنای ریمان به عنوان پیچیده‌ترین ابزارهای ذهن بشری برای کاوش در طبیعت به طور مبسوطی بررسی شده‌اند. در این فصل خواننده ملاحظه می‌کند که چگونه تانسور لختی در فضای‌سه بعدی، بردار گشتاور زاویه‌ای را به بردار دوران مرتبط می‌سازد و نقش توزیع جرم در تقارن جسم ومؤلفه‌های تانسور لختی را به‌وضوح به نمایش می‌گذارد.

هر نظریهٔ الکترومغناطیسی باید با حقایق تجربی مطابقت داشته باشد و باید معادلات ماکسول، بار الکتریکی و قانون نیروی لورنتس را در میان دستگاه‌های مرجع لَخت بی‌تغییر نگه دارد. می‌توان با ترکیب مؤلفه‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در یک تانسور میدان الکترومغناطیسی، شکل تانسوری معادلات ماکسول را به دست آورد و چهار معادلهٔ برداری ماکسول را در دو معادلهٔ تانسوری ساده‌تر ادغام نمود. مزیت برجستهٔ این فرمول‌بندی تانسوری در نمایش رفتار میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از منظر ناظران مختلف است. به این معنی که با انتقال از دیدگاه ناظر ساکن به ناظری که حرکت یکنواخت دارد، وابستگی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به حرکت ناظر به‌خوبی نمایان می‌شود و این حقیقت ژرف آشکار می‌گردد که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موجودیت مستقلی از یکدیگر ندارند و بر حسب حرکت ناظر می‌توانند هر یک به‌تنهایی یا باهم ظاهر شوند.

و بالأخره کتاب با معرفی تانسور انحنای ریمان، که مهم‌ترین تانسور در تبیین نظریهٔ نسبیت عام است به پایان می‌رسد. نسبیت عام بر پایهٔ اصل هم‌ارزی چارچوب‌های شتابدار با چارچوب‌های ساکن مستقر در یک میدان گرانشی استوار است. بر اساس این اصل گرانش سبب ایجاد انحنا درپیوستار فضا ـ زمان می‌گردد و این انحنا با تانسور انحنای ریمان توصیف می‌شود. انحنایی که نمی‌توانیم با حواس خود درک کنیم، اما با مشاهدهٔ مؤلفه‌های غیرصفر تانسور ریمان می‌توانیم به آن پی ببریم. زیرا شرط لازم و کافی برای این که فضای فیزیکی فاقد انحنا یا تخت باشد، این است که تانسور انحنای ریمان صفر باشد. چگونگی به دست آوردن

تانسور انحنای ریمان و نقش آن در معادلهٔ میدان آینشتاین در نسبیت عام، به ساده‌ترین زبانی که پیچیدگی مطلب اجازه می‌دهد در صفحات انتهایی کتاب ارائه شده و خوانندهٔ علاقمند می‌تواند با مطالعهٔ آن معلومات خود را عمیق‌تر کند.

در خاتمه، لازم می‌دانم از تمامی کسانی که چاپ این اثر مدیون نیک اندیشی و زحمات آن‌هاست تشکر کنم. از آقای همائی مدیریت نشر نی به خاطر اهتمام ایشان بر چاپ کتاب‌های ارزشمند و مفید، از آقای امید محمدحیدر بابت دقت نظر در ویرایش کتاب و توصیه‌های مفیدشان، از آقای سینا اسمعیل‌نیا بابت صفحه‌آرایی کتاب و همچنین از خانم روش مدیر بخش تولید و خانم دکتر محرم‌زاده دبیر تحریریه که در شکل‌گیری این اثر نقش داشتند صمیمانه تشکر می‌کنم. با وجود تمامی زحمات افراد یادشده ممکن است که این کتاب نیز مانند هر کتاب دیگری دارای عیوبی باشد که متوجه مترجم است و لذا از خوانندگانِ صاحب‌نظر خواهش می‌کنم که موارد مشاهده‌شده را به پست الکترونیکی مترجم sheikhbagheri@gmail.com و یا پست الکترونیکی ملی bsb1341@iran.ir ارسال فرمایند تا در چاپ‌های بعدی مورد بازبینی و اصلاح قرار گیرد.

بهنام شیخ باقری ـ خرداد ۱۴۰۴

دربارهٔ کتاب بردارها و تانسورها

بردارها و تانسورها در زمرهٔ قوی‌ترین ابزارها در حل مسائل هستند و در محدودهٔ وسیعی از مکانیک و الکترومغناطیس تا نسبیت عام به کار می‌روند. فهم سرشت و کاربردهای بردارها و تانسورها برای دانشجویان فیزیک و مهندسی اهمیت حیاتی دارد.

این کتاب با همان رویکرد کتاب معروف **راهنمای دانشجویان برای معادلات ماکسول** نوشته شده است؛ و دانیل فلایش در آن بردارها و تانسورها را با زبانی ساده برای دانشجویان کارشناسی و ابتدای کارشناسی ارشد شرح می‌دهد و بستر خوبی را در مورد بردارها و حساب دیفرانسیل و انتگرال بردارها، پیش از آغاز مطالعهٔ مؤلفه‌های هموردا و پادوردای تانسورها و کاربردهای آن فراهم می‌کند. ماتریس‌ها و جبر ماتریسی در کتاب‌های پشتیبان مندرج در وب‌سایت مرور شده و برای هر مسئلهٔ مندرج در متن کتاب راه‌حل‌های تعاملی ارائه شده است تا دانشجویان بتوانند برای حل مسائل راهنمایی شوند و یا کل راه‌حل را به یک‌باره مشاهده کنند. همچنین پادکست‌های صوتی نویسنده، این فرصت را فراهم می‌کند که دانشجویان از زبان نویسنده با مفاهیم مهم کتاب آشنا شوند.

دانیل فلایش استاد بخش فیزیک دانشگاه ویتنبرگ، و متخصص در الکترومغناطیس و فیزیک کیهانی است. همچنین او نویسندهٔ کتاب **راهنمای دانشجویان برای معادلات ماکسول** *A Student's Guide to Maxwell's Equations* است که در سال ۲۰۰۸ انتشارات دانشگاه کمبریج آن را منتشر کرد.

مقدمه

این کتاب یک هدف دارد: این‌که به شما کمک کند تا بردارها و تانسورها را طوری بفهمید که بتوانید از آن‌ها در حل مسائل استفاده کنید. اگر همچون اغلب دانشجویان باشید، هنگامی با مبحث بردارها مواجه می‌شوید که یک دورهٔ درسی مکانیک را در دبیرستان یا دانشگاه گرفته باشید. در چنین پایه‌ای حتماً آموخته‌اید که بردارها در واقع بیان ریاضی کمیت‌هایی همچون سرعت و نیرو هستند که هم «مقدار[1]» و هم «جهت[2]» دارند. شما احتمالاً آموخته‌اید که چگونه بردارها را با استفاده ازمؤلفه‌هایشان در امتدادهای (محورهای) x و y و z و به صورت ترسیمی با هم جمع کنید.

این نقطهٔ شروع خوبی است، ولی به نظر می‌رسد که چنین اَعمالی بخش ناچیزی از قدرت بردارها را نشان می‌دهد. اگر مایل باشید تا کمی عمیق‌تر کاوش کنید، می‌توانید این نیرو را مهار کنید تا در خدمت شما باشد. برای این کار کافی است تا بردارها را نه به مثابهٔ چیزهایی که دارای مقدار و جهت هستند بلکه مانند چیزهایی ببینید که وقتی از چارچوب‌های مرجع مختلف مشاهده می‌شوند، به روش‌های کاملاً قابل‌پیش‌بینی رفتار می‌کنند. این ویژگی بردارها، از این‌جا ناشی می‌شود که آن‌ها زیرمجموعهٔ دستهٔ بزرگ‌تری از چیزها به نام «تانسور» هستند که اکثر دانشجویان به هنگام مطالعهٔ دروس دانشگاهی پیشرفته‌تر دربارهٔ «واقعیت‌هایی عالم هستی» با آن‌ها مواجه می‌شوند. گزافه نیست اگر بگوییم وقتی آلبرت آینشتاین توانست نظریهٔ گرانش خود را به زبان تانسورها بیان کند، فهم ما از ساختار بنیادین جهان هستی برای همیشه دگرگون شد.

1. magnitude
2. direction

من بر این باورم و امیدوارم شما نیز با من موافق باشید که اگر ابتدا پایهٔ [دانش] خود در بردارها را تقویت کنید ــ همین به شما کمک می‌کند تا بر پلی از «چیزهایی دارای مقدار و جهت» به «واقعیات عالم» قدم بگذارید ــ فهم تانسورها هم بسیار ساده‌تر خواهد بود. به همین دلیل سه فصل اول این کتاب دربارهٔ بردارهاست، فصل چهارم از تبدیل مختصات می‌گوید و دو فصل آخر به تانسورهایی از مرتبهٔ بالاتر و برخی کاربردهای آن‌ها می‌پردازد.

یک دلیل برای این‌که شاید این کتاب را سودمند بیابید این است که وقتی در نوشتارها و منابع و مراجع آنلاین فیزیک و مهندسی ساعاتی را به جست‌وجوی اطلاعاتی دربارهٔ بردارها و تانسورها سپری می‌کنید با عباراتی از این قبیل برخورد می‌کنید:

- بردار، نمایش ریاضی یک موجودیت فیزیکی است که با مقدار و جهتش توصیف می‌شود.
- بردار، یک دنبالهٔ مرتبی از مقادیر است.
- بردار یک شیء ریاضی[1] است که در بین دستگاه‌های مختصات به روش‌های معینی تبدیل می‌شود.
- بردار تانسوری از مرتبهٔ اول است.
- بردار عملگری است که «یک شکل» را به یک اسکالر تبدیل می‌کند.

همه این تعاریف درستند، اما این‌که کدام یک از آن‌ها برای شما مفید باشد بستگی به مسئلهٔ موردنظر دارد. اگر بتوانید رابطهٔ بین این عبارات را بفهمید، برای مطالعهٔ عمیق موضوعاتی از قبیل مکانیک، الکترومغناطیس، نسبیت عام و... که مفاهیم پیشرفتهٔ بردارها و تانسورها را به کار می‌برند بسیار سودمند خواهد بود.

همچون اغلب موضوعات، نخستین گام درست، اطمینان از درک صحیح واژه‌های مورداستفاده در مواجهه با مسئله است. به همین دلیل «فصل ۱» به معرفی تعاریف اصلی موردنیاز برای فهم بردارها و تانسورها می‌پردازد، و هنگامی که برای تعاریف پیشرفته‌تر آماده شدید آن‌ها را در ابتدای فصل ۵ خواهید یافت.

شاید بخواهید بدانید که دربارهٔ موضوع بردارها یا تانسورها این کتاب چه تفاوتی با کتاب‌های دیگر دارد؟ شاید مهم‌ترین تفاوتش این باشد که در این کتاب اهمیتی مساوی به مفاهیم بردار و تانسور داده شده است؛ یک فصل کامل (فصل ۳) به کاربردهای برگزیدهٔ بردار و فصلی دیگر (فصل ۶) به مثال‌هایی از کاربردهای تانسور اختصاص دارد.

همچنین، در این کتاب چگونگی ارائهٔ مطالب بسیار متفاوت با کتاب‌های دیگر است.

1. mathematical object

توصیفات آن به زبانی غیررسمی نوشته شده و دقت ریاضی تا اندازه‌ای که به ابهام در بنیاد فیزیکی منجر نشود، حفظ شده است. اگر فکر می‌کنید که بردارها را به‌خوبی می‌شناسید و فقط به مروری سریع نیاز دارید می‌توانید به‌سرعت از فصل‌های ۱ تا ۳ بگذرید. اما اگر برخی جنبه‌های بردارها برای شما مبهم است و نمی‌دانید که چگونه آن‌ها را در حل مسائل به کار ببرید، این سه فصل ابتدایی خیلی به درد شما خواهد خورد. و نیز اگر از قبل با تانسورها آشنا باشید و حالا ندانید که واقعاً چه هستند و چگونه به کار می‌روند، آن‌گاه فصل‌های ۴ تا ۶ بینشی از آن‌ها به شما خواهد داد.

در جایگاه راهنما برای دانشجویان، این کتاب با دو مرجع اضافه همراه است که برای کمک به شما در درک و به کاربردن بردارها و تانسورها در نظر گرفته شده است. این دو مرجع اضافی: یکی وب‌سایتی تعاملی است و دیگری سلسله‌ای از پادکست‌های صوتی. بر روی وب‌سایت راه‌حل تمامی مسائل این کتاب با فرمتی تعاملی قرار گرفته است و شما قادر خواهید بود که هم کل راه‌حل را به یک‌باره ببینید و هم می‌توانید راهنمایی بخواهید که شما را به پاسخ نهایی هدایت کند. بنابراین، وقتی با این عبارت در متن مواجه شدید که: «شما می‌توانید با نگاهی به مسائل انتهای فصل بیشتر بیاموزید»، به خاطر داشته باشید که پاسخ کامل هر یک از مسائل در دسترس شماست. و اگر شما از آن دسته از شاگردانی باشید که از راه شنیدن بهتر می‌آموزند تا از خواندن متن، پادکست‌های صوتی برای شما آماده شده است. این فایل‌های صوتی (MP3)، شما را در هر فصل راهبری خواهند کرد، و به جزئیات مهم اشاره و توضیحات اضافی موردنیاز دربارهٔ مفاهیم اصلی را ارائه خواهند نمود.

آیا این کتاب برای شما مناسب است؟ اگر شما دانشجوی علوم یا مهندسی هستید و در یکی از کلاس‌های خود با بردارها یا تانسورها سروکار دارید، و از توانایی خود در به کار بردن آن‌ها اطمینان ندارید، این کتاب برای شما مناسب است. در این حالت، باید کتاب را بخوانید، به پادکست‌های پیوست این کتاب گوش بدهید، و قبل از این‌که کلاس اضافی دیگری بروید یا آزمون استانداردی دربارهٔ بردارها یا تانسورها را بگذرانید، مثال‌ها و مسائل را حل کنید. اگر شما دانشجوی کارشناسی ارشد هستید یا دارید برای انتقال از دوره‌های کارشناسی و کتاب‌های درسی در این دوره به مطالب پیشرفته‌تری که در مقطع کارشناسی ارشد است تلاش می‌کنید، این کتاب ممکن است به شما در انجام این مرحله کمک کند.

و اگر شما نه دانشجوی کارشناسی و نه کارشناسی ارشد هستید، بلکه یک جوان کنجکاو یا یک طلبهٔ مادام‌العمر هستید که می‌خواهد در مورد بردارها بیشتر بداند، به این سفر خوش آمدید. من اشتیاق شما را ستایش می‌کنم و امیدوارم این کتاب در سفرتان به شما کمک کند.

قدردانی

این پیشنهاد دکتر جان فاولر از انتشارات دانشگاه کمبریج بود که موجب شروع نوشتن این کتاب شد، و راهنمایی‌های صبورانه و حمایت‌های بی‌وقفهٔ او بود که باعث شد کار تمام شود. من از این‌که با جان در پروژهٔ او و کتاب **راهنمای دانشجویان برای معادلات ماکسول** کار کردم بسیار مفتخرم و از کمک‌های فراوان او به این کتاب‌ها قدردانی می‌کنم. (انجام پروژه‌ای مانند این، واقعاً نیازمند همراهی بسیاری است که باید به خاطر تلاش‌هایشان قدردانی شوند.) لورا کینامن در حالی که مشغول گذراندن دورهٔ دکترای خود در رشتهٔ فیزیک در دانشگاه نوتردام بود، وقت گذاشت تا کل دست‌نوشته را با دقت بخواند و سهم عمده‌ای در بحث تانسور لَختی در فصل ۶ داشت. همچنین جو فریچمن، فارغ‌التحصیل ویتنبرگ، و وایات بریجمن، دانشجوی کارشناسی کارنگی ملون نسخهٔ خطی را خواندند و پیشنهادهای مفیدی ارائه کردند. کری میلر دیدگاه یک دانشجوی شیمی را ارائه کرد و همسرش جردن میلر سخاوتمندانه تخصص (LaTeX) خود را به اشتراک گذاشت. پروفسور آدام پارکر از دانشگاه ویتنبرگ و دانیل راس از دانشگاه ویسکانسین تمام تلاش خود را کردند تا من را به یک پایهٔ محکم ریاضی هدایت کنند، و پروفسور مارک سَمون از کالج بیتس بسیار فراتر از نقش داور رفت و به خاطر ریشه‌یابی بسیاری از خطاها و ارائهٔ توضیحات بهتر در چندین مورد از آن‌ها، شایستهٔ تقدیر است. و باید اعلام کنم که در این اثر مسئولیت هرگونه ناهماهنگی یا خطای باقی‌مانده صرفاً بر عهدهٔ من است.

همچنین، می‌خواهم از همهٔ دانشجویانی که در دو سالی که برای نوشتن این کتاب صرف کردم با من کلاس داشته‌اند قدردانی کنم، و از این‌که سهم خودشان از وقت مرا، با این پروژه قسمت کردند بسیار سپاس‌گزارم. بزرگ‌ترین ازخودگذشتگی توسط جیل جیانولا انجام شده است که با فهمی وصف‌نشدنی، با ظرافت نیازهای زمانی و مکانی در حال گسترش نوشتهٔ من را برآورده کرد.

دانیل فلایش

فصل ۱

بردارها

۱-۱. تعاریف (پایه)

راه‌های زیادی برای تعریف «بردار» وجود دارد. یکی از ساده‌ترین آن‌ها برای مبتدیان این است:

بردار بیان ریاضی یک موجودیت فیزیکی[1] است که با اندازه[2] (یا مقدار) و جهت مشخص می‌شود.

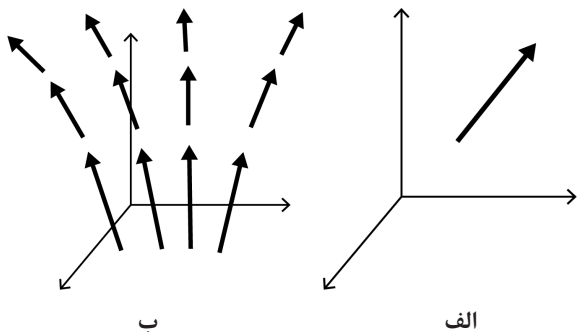
با رعایت این تعریف، «تندی[3]» (هر قدر هم که یک شیء تند حرکت کند) با یک بردار معرفی نمی‌شود، اما «سرعت[4]» (یعنی این‌که شیء با چه تندی‌ای و در چه جهتی حرکت کند) شرط یک «کمیت برداری[5]» را برآورده می‌کند. مثال دیگری از یک کمیت برداری «نیرو[6]» است که توصیف می‌کند یک چیز با چه قدرتی و در چه جهتی فشرده یا کشیده می‌شود. اما دما که دارای مقدار ولی فاقد جهت است، یک کمیت برداری نیست.

کلمهٔ بردار (vector) از ریشهٔ لاتینی *vehere*، به معنی «حمل کردن و بردن» است؛ و اولین بار آن را اخترشناسانی به کار بردند که در جست‌وجوی سازوکاری برای

1. physical entity
2. size
3. speed
4. velocity
5. vector quantity
6. force

حمل یک سیاره به دور خورشید بودند.[1] در متن‌ها، سرشت برداری یک شیء اغلب با قراردادن پیکانی کوچک در بالای متغیری که معرف شیء است (مثل $\vec{F}$)، یا با به کاربردن قلم پررنگ (همچون F)، یا به وسیلهٔ خطی در زیر حروف (مانند $\underline{F}$ یا $\underset{\sim}{F}$) نشان داده می‌شود. وقتی معادلاتی مشتمل بر بردارها را می‌نویسید، خیلی مهم است که به یکی از این روش‌ها (یا روش دلخواه دیگری) عادت کرده باشید. در هر حال، موضوع مهم این نیست که بردارها را چگونه نشان دهید، بلکه این است که آن‌ها را همچون کمیت‌های غیربرداری ننویسید.

یک بردار معمولاً مانند شکل ۱-۱ (الف) به صورت یک قطعه‌خط جهت‌دار یا یک پیکان نشان داده می‌شود. همان‌طور که بعداً در این بخش خواهید دید، بردار را به صورت مجموعهٔ مرتبی از N تا عدد نیز می‌توان نمایش داد که در آن N تعداد ابعاد فضایی است که بردار در آن قرار دارد.



شکل ۱-۱. نمایش تصویری یک بردار (الف)، یک میدان برداری (ب).

البته، مقدار واقعی یک بردار بستگی به این دارد که چه چیزی را نشان می‌دهد. مثلاً بردار شکل ۱-۱ (الف) می‌تواند سرعت باد در جایی، شتاب یک موشک، نیروی وارد بر توپ فوتبال، یا یکی از هزاران کمیت برداری باشد که شما هر روز با آن‌ها برخورد می‌کنید. در هر حال، هر چیز دیگری که ممکن است در مورد بردارها یاد بگیرید، می‌توانید مطمئن باشید که همهٔ آن‌ها دو ویژگی اندازه و جهت را دارند. اندازهٔ

1. *The Oxford English Dictionary.* 2nd ed. 1989.

یک بردار معمولاً با طول پیکان نشان داده می‌شود و به شما می‌گوید مقدار کمیت معرفی‌شده توسط بردار چقدر است. انتخاب مقیاسی برای اندازهٔ طول به شما (یا هر چیزی که بردار را ترسیم می‌کند) بستگی دارد، اما وقتی مقیاس برقرار شد تمام بردارها باید با همان مقیاس ترسیم شوند. وقتی مقیاس را بدانید، می‌توانید مقدار هر بردار را فقط از طول آن به دست آورید. جهت یک بردار معمولاً با نشان دادن زاویهٔ بین پیکان با یک یا چند جهت معلوم (که معمولاً محورهای مختصات هستند) مشخص می‌شود، و به شما می‌گوید که بردار به کدام سمت اشاره می‌کند.

بنابراین، آیا این‌که بردارها با مقدار و جهتشان مشخص می‌شوند به معنی این است که دو بردار با طول مساوی که به جهت واحدی اشاره می‌کنند را می‌توان یک بردار پنداشت؟ به عبارت دیگر، اگر شما بردار نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۱ (الف) را بدون تغییر طول یا جهتش به جاهای دیگری ببرید، آیا همچنان همان بردار خواهد بود؟ در مورد برخی کاربردها پاسخ مثبت است و آن بردارها را «آزاد» می‌نامند. شما می‌توانید یک بردار آزاد را مادام که طول یا جهتش را تغییر نداده‌اید به هر جایی منتقل کنید و آن بردار ثابت بماند. اما در بعضی مسائل فیزیک و مهندسی، شما با بردارهایی که در یک مکان معلوم وارد می‌شوند سروکار دارید؛ چنین بردارهایی «مقید[1]» یا «متصل[2]» نامیده می‌شوند، و شما مجاز نیستید بردارهای مقید را همچون بردارهای آزاد جابه‌جا کنید.[3] شما ممکن است با اصطلاح بردارهای «لغزان» مواجه شوید؛ این اصطلاح در مورد بردارهایی که آزادانه در امتداد طولشان حرکت می‌کنند ولی نمی‌توان طول یا جهت آن‌ها را تغییر داد به کار می‌رود. از چنین بردارهایی برای مسائل مشتمل بر گشتاور و حرکت زاویه‌ای استفاده می‌شود.

اگر به کاربردهایی مانند توصیف سرعت باد در نقاط مختلف جوّ فکر کنید، می‌توانید سودمندی بردارهای مقید را بفهمید. برای انجام آن، بایستی تصمیم بگیرید که در هر نقطهٔ موردنظر یک بردار مقید بکشید، به طوری که آن بردارها سرعت و

1. bound 2. anchored

۳. ریاضی‌دانان با بردارهای مقید، زیاد سروکار ندارند، چون تعریف ریاضی بردار به انتقالش می‌پردازد تا مکانش.

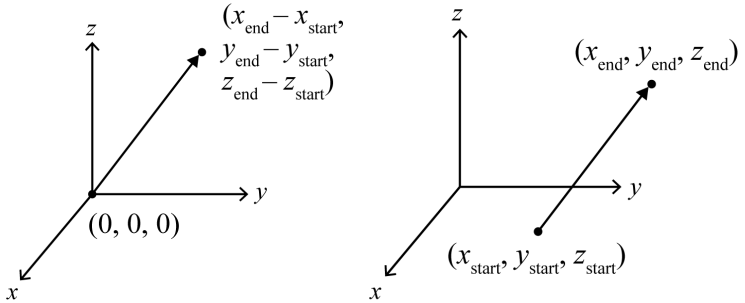
جهت باد در آن مکان را نشان دهند (در نقطه‌ای که بردار مقید است، اکثر مردم بردار را با دنباله‌اش، یعنی سمت بدون پیکان، ترسیم می‌کنند). مجموع چنین بردارهایی یک «میدان برداری» نامیده می‌شود که نمونه‌ای از آن را در شکل ۱-۱ (ب) می‌بینید.

اگر به راه‌هایی نمایش یک بردار مقید می‌اندیشید، ممکن است به این نتیجه برسید که بردار را می‌توان به‌سادگی با تعیین نقاط ابتدا و انتهای پیکان تعریف کرد. به این ترتیب، در دستگاه مختصات سه‌بعدی دکارتی، همان‌طور که در شکل ۱-۲ (الف) نیز نشان داده شده است، فقط به دانستن مقادیر x، y و z دو انتهای آن نیاز دارید. (شما می‌توانید بعداً در این فصل در مورد نمایش بردار در دستگاه‌های مختصات غیردکارتی مطالعه کنید).

اکنون یک حالت خاص را در نظر بگیرید که در آن بردار به مبدأ دستگاه مختصات متصل شده باشد (یعنی همان‌طور که در شکل ۱-۲ (ب) مشخص شده است انتهای بدون فلش آن در نقطهٔ تقاطع محورها قرار گرفته باشد).[1] چنین بردارهایی را می‌توان با سه عدد که مختصات x، y و z نقطهٔ انتهای آن‌هاست به‌سادگی نمایش داد. بنابراین، می‌توان برداری متصل به مبدأ را که پنج واحد در امتداد محور x کشیده شده را به صورت (۰،۰،۵) نشان داد. در این شکل از نمایش بردار، مقادیر معرف آن «مؤلفه‌های» بردار نامیده می‌شوند، و تعداد مؤلفه‌های موردنیاز برای تعریف یک بردار برابر است با تعداد ابعاد فضایی که بردار در آن قرار دارد. بنابراین، می‌توان در یک فضای دوبعدی، یک بردار را با یک جفت عدد، و در یک فضا ـ زمان چهاربعدی با فهرستی از چهار عدد نشان داد. این شیوهٔ نمایش توجیه می‌کند که چرا در علوم کامپیوتر فهرستی از اعداد افقی را «بردار سطری» و فهرستی از اعداد ستونی را «بردار ستونی» می‌نامند. تعداد اعداد در چنین بردارهایی به شما اطلاع می‌دهند که تعداد ابعاد فضایی که بردار در آن قرار دارد چند تاست.

برای درک تفاوت بردار با موجودیت‌های دیگر شاید بررسی چیزهایی که به‌وضوح

۱. بردار نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۲ (الف) می‌تواند با تفریق x، y و z ابتدای آن، از مقادیر انتهایی، به مبدأ مختصات جابه‌جا شود.



شکل ۱-۲. نمایش بردار در دستگاه مختصات سه‌بعدی دکارتی.

بردار نیستند سودمند باشد. مثلاً دمای اتاقی که در آن نشسته‌اید را در نظر بگیرید، هر نقطهٔ اتاق دمایی دارد که می‌توانید آن را با یک عدد (تک عدد) نشان دهید. مقدار آن می‌تواند با مقدار جاهای دیگر متفاوت باشد، لیکن در هر نقطهٔ معین می‌توان دما را تنها با یک عدد منفرد که مقدار آن است، نمایش داد. چنین کمیت‌هایی که فقط مقدار دارند، از زمان ویلیام روآن همیلتون[1]، «اسکالر» نامیده شدند. او این واژه را در مورد تمام کمیت‌هایی که با یک مقیاس، می‌توانستند روندی افزایشی از منهای بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت را اختیار کنند، به کار می‌برد. بنابراین:

«اسکالر» بیان ریاضی یک شیء فیزیکی[2] است که فقط با یک مقدار مشخص می‌شود.

مثال‌های دیگری از اسکالرها عبارتند از: جرم، بار الکتریکی، انرژی و تندی (که به صورت مقدار بردار سرعت تعریف می‌شود). شایستهٔ توجه است که تغییر دما در یک منطقه از فضا هم دارای مقدار و هم دارای جهت است، و بنابراین می‌تواند با یک بردار نشان داده شود؛ به این ترتیب، نتیجه می‌شود که از گروهی از اسکالرها می‌توان بردار ساخت. شما می‌توانید در فصل ۲ در مورد چنین بردارهایی (که «گرادیان» یک میدان اسکالر نامیده می‌شوند) مطالعه کنید.

1. W.R. Hamilton, Phil. Mag. XXIX, 26. 2. physical entity